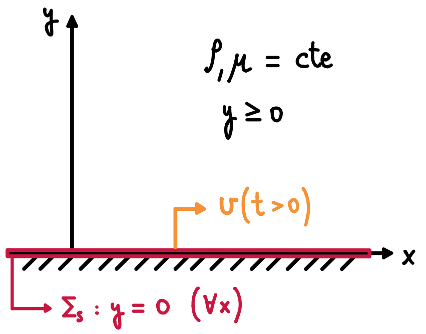
Problema del Flujo de Rayleigh



$t = 0 : \vec{U} = \vec{0}$

$t > 0,\ y > 0 :\ u = U = u_s$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (SYM DE FLUJO)

ECUACIÓN CONTINUIDAD $\longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \longrightarrow v = cte(t)$

ECdM$_y$ con $v = 0$ y $\vec{f_m} = -\nabla U_m$:

$0 = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + U_m\right) = cte$ porque en $y \to \infty$ $v = 0$ $\forall t$

ECdM$_x$ con $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $v = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + U_m\right) = 0$:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{1\ c.i.} = \nu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{2\ c.c.\ en\ y}$$

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ VISCOSIDAD CINEMÁTICA

CONDICIÓN INICIAL (c.i.) $t = 0 :\ u = 0\ \forall y$

CONDICIONES DE CONTORNO (c.c.) $y = 0 :\ u = U$; $y \to \infty :\ u \to 0$

VARIABLES INDEPENDIENTES (V.I.) : y, t
VARIABLES DEPENDIENTES (V.D.) : u
PARÁMETROS EN LA ECUACIÓN : ν
PARÁMETROS EN LA c.i. : no hay
PARÁMETROS EN LAS c.c. : U

$\Rightarrow$ VD = f (VI, PARÁMETROS)

$u = u(y, t, \nu, U)$

Por tanto :

$v = 0\ \forall x, y, t$ (FLUJO UNIDIRECCIONAL) $\longrightarrow \vec{U} = U(y,t)\,\vec{i}$

¡OJO! ANTES DE ADIMENSIONALIZAR VEMOS SI PODEMOS QUITARNOS ALGÚN PARÁMETRO AGRUPÁNDOLO CON ALGUNA VARIABLE.

$\frac{\partial u}{\partial t} = \underset{cte}{\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial (\nu t)} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

c.i. : $\nu t = 0 :\quad u = 0$

c.c. : $\nu t > 0$ $\begin{cases} y = 0 : & u = U \\ y \to \infty : & u \to 0 \end{cases}$

VARIABLES INDEPENDIENTES (V.I.) : $y, \nu t$
VARIABLES DEPENDIENTES (V.D.) : u
PARÁMETROS EN LA ECUACIÓN : no hay
PARÁMETROS EN LA c.i. : no hay
PARÁMETROS EN LAS c.c. : U

$\Rightarrow u = u(y, \nu t, U)$

HEMOS ELIMINADO UNA MAGNITUD DE LA FORMULACIÓN ORIGINAL

Ecuaciones de unidades de las distintas magnitudes :

$[u] = L T^{-1}$

$[y] = L$

$[t] = T$

$[U] = L T^{-1}$

$\nu \sim l_{c\,molec} \cdot v_{c\,molec}$

$Re = \frac{l u}{\nu} \longrightarrow \nu = l u\, Re^{-1} \longrightarrow [\nu] = [l][u] = L^2 T^{-1} \longrightarrow [\nu t] = L^2$

HAY 2 MAGNITUDES DIMENSIONALMENTE INDEPENDIENTES (2 MDI)

$\downarrow$

L, T

A la hora de elegir magnitudes para adimensionalizar:

1) PARÁMETROS DIMENSIONALES ($\neq$ ECUACIONES DE UNIDADES)
2) VARIABLES INDEPENDIENTES

$\Rightarrow$ $\boxed{U, \ \nu t}$

Cambios en las magnitudes:

$$u \longrightarrow \frac{u}{U}$$
$$y \longrightarrow \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$$
$$\nu t \longrightarrow 1$$
$$U \longrightarrow 1$$

$$\Rightarrow \frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) \xrightarrow{\frac{y}{\sqrt{\nu t}} = \eta}$$

SOLUCIÓN DE SEMEJANZA

$$\boxed{\frac{u}{U} = f(\eta), \text{ con } \eta = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}}$$

Ocurre al adimensionalizar con una V.I. y las V.D. se relacionan en una VARIABLE DE SEMEJANZA (η).

Para validar la ecuación vamos a necesitar las derivadas de η:

$$\frac{\partial \eta}{\partial(\nu t)} = \frac{\partial}{\partial(\nu t)}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) = y\left[-\frac{1}{2}(\nu t)^{-3/2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\eta}{\nu t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\nu t}}$$

f sólo depende de η: $\partial \to d$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial(\nu t)}} \quad \frac{\partial u}{\partial(\nu t)} = U\frac{\partial f}{\partial(\nu t)} = U\frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial(\nu t)} = -\frac{1}{2}U\frac{\eta}{\nu t}\frac{df}{d\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = U\frac{\partial f}{\partial y} = U\frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = U\frac{1}{\sqrt{\nu t}}\frac{df}{d\eta}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U}{\sqrt{\nu t}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{df}{d\eta}\right) = \frac{U}{\sqrt{\nu t}}\frac{d^2 f}{d\eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{U}{\nu t}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

Sustituyendo en la ECdMx:

$$-\frac{1}{2}U\frac{\eta}{\nu t}\frac{df}{d\eta} = \frac{U}{\nu t}\frac{d^2 f}{d\eta^2}$$

$$f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0$$

c.i.: $\nu t = 0$: $u = 0$ $\longrightarrow$ $\eta \to \infty$: $f \to 0$

c.c.: $\begin{cases} y = 0: \ u = U \longrightarrow \eta = 0: \ f = 1 \\ y \to \infty: \ u \to 0 \longrightarrow \eta \to \infty: \ f \to 0 \end{cases}$

Dos c.c. colapsan, por lo que el problema queda:

$$\boxed{f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0 \qquad \begin{matrix} \eta = 0: & f = 1 \\ \eta \to \infty: & f \to 0 \end{matrix}}$$

$\eta = 0$: $f = 1$ $\longrightarrow$ ESTA C.C. (MOVIM. PLACA) CONDUCE EL PROBLEMA

$\eta \to \infty$: $f \to 0$ $\longrightarrow$ PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO (boundary solve problem)

Si las dos c.c. se diesen en el mismo punto $\longrightarrow$ problema de valor inicial (initial value problem), mucho más fácil de resolver $\longrightarrow$ convertimos nuestro problema:

$$\eta = 0 \begin{cases} f = 0 \\ f' = g_0 \text{, con } g_0 \,/\, \lim\limits_{\eta \to \infty} f = 0 \end{cases}$$

$$f'(\eta) = g(\eta) \longrightarrow g' + \frac{1}{2}\eta g = 0 \longrightarrow \int_{\boxed{g_0}}^{g} \frac{\tilde{g}'}{\tilde{g}}\, d\tilde{g} = -\frac{1}{2}\int_{\boxed{0}}^{\eta} \tilde{\eta}\, d\tilde{\eta} \longrightarrow \ln\left(\frac{g}{g_0}\right) = -\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 \longrightarrow$$

$\eta \to 0 : g = g_0$

Integramos de nuevo

$f(\eta = 0) = 1$

$$\longrightarrow g = g_0 \exp\left[-\left(\frac{\eta}{2}\right)^2\right] = \frac{df}{d\eta} \longrightarrow \int_0^{\eta} \frac{df}{d\tilde{\eta}}\, d\tilde{\eta} = f\Big|_0^{\eta} = f - 1 = g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}$$

Entonces:

$$f = 1 + g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}$$

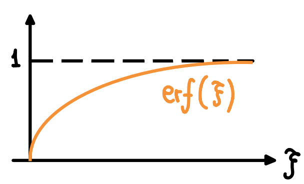
Aplicamos la c.c. que falta:

$$\lim_{\eta \to \infty} f = 0 \longrightarrow \lim_{\eta \to \infty} \left\{ 1 + g_0 \int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta} \right\} = 0 \longrightarrow 1 + g_0 \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta} = 0$$

$$\boxed{g_0 = -\frac{1}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

Finalmente:

$$\boxed{f = 1 - \frac{\int_0^{\eta} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}}{\int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\tilde{\eta}}{2}\right)^2\right] d\tilde{\eta}}}$$



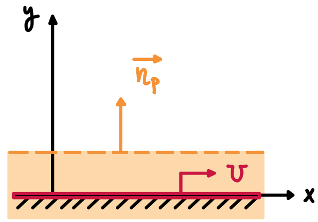
Función error:

$$\mathrm{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} \exp\left(-\tilde{\xi}^2\right) d\tilde{\xi}$$

$$\boxed{f = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{\eta}{2}\right)}$$

Función error complementaria

Fuerza por Unidad de Superficie sobre la Placa



$$\vec{n}_p = \vec{j}$$

$$\vec{\tau}_p = \bar{\bar{\tau}}_\mu \Big|_{y=0} \cdot \vec{n}_p$$

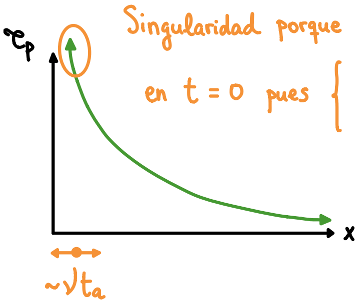
$$\bar{\bar{\tau}}_\mu = 2\mu\bar{\bar{S}} = \mu\begin{bmatrix} 2\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\,0} & \frac{\partial u}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}^{\,0} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}}_{\,0} & 2\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}_{\,0} \end{bmatrix} = \mu\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

Flujo 2D

$$\longrightarrow \vec{\tau}_p = \mu\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}_{y=0}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{\vec{\tau}_p = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}\vec{i}}$$

LA VISCOSIDAD SE OPONE AL MOVIMIENTO DE LA PLACA PUES $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} < 0$ AL SER $\frac{\partial u}{\partial y} < 0$ AL $\downarrow u$ SI $\uparrow y$.

$$\longrightarrow \vec{\tau}_p = \mu U \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y=0}\vec{i} = \mu U\left(\frac{df}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_{y=0}\vec{i} = \frac{\mu U}{\sqrt{\nu t}} g_0 \vec{i} \longrightarrow \boxed{\vec{\tau}_p = -\frac{\mu U}{\sqrt{\pi \nu t}}\vec{i}}$$

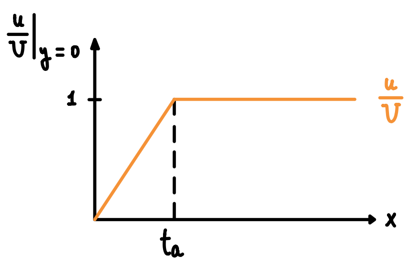


Singularidad porque le impartimos una aceleración infinita en $t=0$ pues $\begin{cases} \circ\ t=0 & u=0 \\ \circ\ t>0 & u=U \end{cases}$

$$\tau_p \sim \frac{\mu U}{l_{cy}} \; ; \; l_{cy} \sim \sqrt{\nu t}$$

CADA VEZ INCORPORAMOS MÁS FLUIDO AL MOVIMIENTO AL CRECER l_{cy} CON t.
CADA VEZ CUESTA MENOS MOVER LA PLACA.

En realidad va a haber un tiempo de arranque:



$$\frac{u}{U} = \begin{cases} \frac{t}{t_a} & 0 \le \frac{t}{t_a} \le 1 \\ 1 & \frac{t}{t_a} \ge 1 \end{cases}$$

ESTO NOS INTRODUCE νt_a EN EL PROBLEMA, DESTRUYENDO LA SOLUCIÓN DE SEMEJANZA EN EL ARRANQUE.

PERO LA SOLUCIÓN DE SEMEJANZA SIGUE SIENDO VÁLIDA EN $\frac{\nu t}{t_a} >> 1$ PORQUE SE PIERDE EL DETALLE DEL ARRANQUE.